

MATRICES EN DE THEORIE VAN DYNAMISCHE SYSTEMEN

J. GRASMAN

Centrum voor Wiskunde en Informatica
Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam

1. INLEIDENDE OPMERKINGEN

Bij matrices denkt men onmiddellijk aan lineaire algebra. Het is echter zo dat ook in andere gebieden van de wiskunde matrices een fundamentele rol spelen, zie DE LANGE en KINDT [6]. In deze voordracht zal de functie van matrices in de theorie van dynamische systemen behandeld worden. Bij lineaire systemen ligt het voor de hand om met matrices en vectoren te werken. Bij niet-lineaire systemen bepalen eigenwaarden van matrices de stabiliteit van oplossingen en het type oplossing dat ontstaat bij bifurcatie. We zullen zowel discrete als continue dynamische systemen beschouwen en de analogie tussen die twee benadrukken. Als voorbeeld zullen we enkele malen op een 1-dimensionaal systeem terugvallen. Hiermee komt de matrix een vector notatie te vervallen. Het is echter zo dat in vergelijkbare werkelijke problemen de andere variabelen veelal passief zijn. Voor het begrijpen van het verschijnsel van omslag van stabiliteit is dan een 1-dimensionaal voorbeeld het meest illustratief.

2. DISCRETE DYNAMISCHE SYSTEMEN

Bij het begrip systeem kunnen we denken aan een mechanisch systeem (een slinger) een elektrisch systeem (een schakeling), maar ook aan een ecologisch systeem of een economisch systeem. De toestand van een systeem is vastgelegd in de waarde die aan een aantal variabelen toegekend wordt. Afgezien van externe storingen bepaalt de dynamica van het systeem de

waarden van de toestandsvariabelen voor $t > 0$ gegeven de toestand op $t = 0$. Kijken we naar de waarden op discrete tijden $t = k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ dan wordt het dynamisch gedrag beschreven door een stelsel differentievergelijkingen van het type

$$(1) \quad x_i(k+1) = F_i(x_1(k), \dots, x_n(k)), \quad i = 1, \dots, n,$$

waarin x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ de toestandsvariabelen zijn.

Onze kennis van de functies F_i bepaalt hoe goed we de toekomstige waarden van de variabelen kunnen voorspellen. Voor een eenvoudig systeem (een mechanische slinger) zijn deze functies exact af te leiden. Voor b.v. een economisch systeem is dit zeker niet altijd mogelijk. In eerste benadering zal men een lineair verband veronderstellen

$$(2) \quad x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(k) + b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zonder verlies van algemeenheid mogen we $b_i = 0$ nemen. Vergelijking (2) wordt dan in vector vorm

$$(3) \quad x(k+1) = Ax(k).$$

3. DYNAMICA VAN EEN BIOLOGISCHE POPULATIE

We beschouwen een populatie van een diersoort met leeftijdsopbouw: $x_i(k)$ is het aantal dieren in het i^{de} levensjaar in het jaar k . De vruchtbaarheidcoëfficiënt en sterfecoëfficiënt van dieren in leeftijdsklasse i zijn, resp., f_i en s_i . In het jaar $k + 1$ is er een geboorte

$$(4a) \quad x_1(k+1) = \sum_{j=1}^n f_j x_j(k).$$

Het aantal dieren van leeftijdsklasse $i > 1$ in jaar $k + 1$ wordt

$$(4b) \quad x_i(k+1) = (1-s_{i-1}) x_{i-1}(k).$$

In de vorm (3) vinden we voor de matrix

$$(5) \quad A = \begin{pmatrix} f_1 & & & & f_n \\ & 1-s_1 & & & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1-s_{n-1} & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} .$$

In de biologische kontekst wordt dit de Leslie matrix genoemd, zie PIELOU [8]. Voor een studie van de invloed van jacht op een zeehondenpopulatie verwijzen we naar FLIPSE en VELING [2] en DE LANGE en VONK [5].

De eigenwaarden λ_i , $i=1, \dots, n$ van de matrix zijn bepalend voor de dynamica van de populatie. Voor biologisch realistische waarden van s_i en f_i is de eigenwaarde, welke in absolute waarde genomen het grootst is, altijd reëel en positief. Noem deze eigenwaarde λ_s . Uit de eigenwaarden kan de ontwikkeling van de populatie op lange termijn afgeleid worden. Voor $\lambda_s > 1$ is er een toename. Ook kan een uitspraak gedaan worden over de verdeling van de populatie over de leeftijdsklassen onder de aanname dat $\lambda_s > 0$ en dat de andere eigenwaarden binnen de eenheidscirkel in het complexe vlak liggen. De eigenvector ξ_s behorende bij λ_s met

$$(6) \quad A\xi_s = \lambda_s \xi_s, \quad |\xi_s| = 1, \quad |x| = \sum_{i=1}^n x_i$$

geeft de stationaire leeftijdsopbouw. Voor willekeurige beginwaarden $x(0) = x_0$ gaat de populatie naar de stationaire verdeling:

$$(7) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{|x(k)|} = \xi_s, \quad x(k) = A^k x_0 .$$

Het is ook mogelijk dat meerdere eigenwaarden in absolute waarde gelijk zijn aan λ_s en voldoen aan

$$(8) \quad \lambda_{j_m} = \lambda_s e^{2\pi i m / r}, \quad m = 1, \dots, r .$$

In dat geval varieert de verdeling periodiek en hangt af van de beginwaarde. Dit verschijnsel doet zich voor als de matrix A de volgende vorm heeft

$$(9) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & f_n \\ 1-s_1 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1-s_{n-1} & 0 \end{pmatrix} .$$

Een concreet biologisch voorbeeld hiervan is de wisselende aanwezigheid van tweejarige planten in een gebied.

Het niet realistische aan het lineaire model (3) voor de biologische populatie is dat deze òf uitsterft òf explodeert. Dit kan ondervangen worden door A te laten afhangen van de omvang van de populatie:

$$(10) \quad x(k+1) = \frac{1}{q} Ax(k), \quad q = 1 + \alpha |x|.$$

Hierdoor neemt ieder element van A af bij een toename van de populatie: zowel de overlevingscoëfficiënt $1-s_i$ als de vruchtbaarheidscoëfficiënt f_i worden gedeeld door de factor $1 + \alpha |x|$. We kunnen hierbij denken aan het effect als slechts een beperkte hoeveelheid voedsel voor de populatie beschikbaar is. In dat geval wordt naast de verdeling ook de omvang van de populatie stationair voor $\lambda_s > 1$:

$$(11) \quad x_s = |x_s| \xi_s, \quad |x_s| = (\lambda_s - 1) / \alpha.$$

4. NIET-LINEAIRE DISCRETE DYNAMISCHE SYSTEMEN

Het systeem (10) is niet-lineair en is een speciaal geval van (1). In z'n algemeenheid kan men stabiliteit van stationaire en periodieke oplossingen van systemen van het type

$$(11) \quad x(k+1) = F(x(k))$$

analyseren, zie CAPEL [1].

Definitie 1. Het punt p is een periodiek punt met periode k van (11) als

$$(12) \quad p = F^{(k)}(p) \quad \text{en} \quad p \neq F^{(j)}(p) \quad \text{voor} \quad 1 \leq j < k,$$

waarbij $F^{(k)}(x) = F(F^{(k-1)}(x))$, $F^{(1)}(x) = F(x)$.

Definitie 2. Een stationair punt van (11) is een periodiek punt met periode 1.

Definitie 3. Een periodiek punt met periode k van (11) heet asymptotisch stabiel als

$$(13) \quad \|F^{(k)}(x) - F^{(k)}(p)\| < \|x-p\|$$

voor all x in een omgeving van p en als bovendien

$$(14) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|F^k(x) - F^{(k)}(p)\| \rightarrow 0 \quad (\|\cdot\| \text{ is Euclidische norm}).$$

Stelling 1. Een periodiek punt p van (11) is asymptotisch stabiel als de eigenwaarden van de Jacobiaan van F in p in absolute waarde kleiner dan 1 zijn.

Stelling 2. Een periodiek punt p van (11) is instabiel als minstens één van de eigenwaarden van de Jacobiaan van F in p in absolute waarde groter dan 1 is.

De Jacobiaan van F in P is de matrix

$$(15) \quad J = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} (p) \right]_{n \times n}.$$

Men past de stelling toe door lokaal het niet-lineaire systeem te benaderen door een lineair systeem. Substitueer

$$(16) \quad x = p + v$$

in (11). Dit levert

$$(17) \quad v(k+1) = J v(k) + R(v(k)).$$

De restterm voldoet aan $R(v)/\|v\| \rightarrow 0$ voor $v \rightarrow 0$ en is te verwaarlozen.

Merk op dat voor $R = 0$ systeem (17) lineair is en van het type (3).

Als een eigenwaarde op de eenheidscirkel in het complexe vlak ligt dan is er iets bijzonders met het niet-lineaire systeem (11). Het kan niet zo zijn dat de parameters van een "real world" systeem exact een waarde aannemen die hiermee overeenkomt. Wel kan een parameter langzaam variëren en door zo'n kritische waarde gaan. De k -periodieke oplossing p verliest dan z'n stabiliteit en een andere oplossing takt af. De volgende mogelijkheden doen zich voor:

- a. Een eigenwaarde neemt de waarde 1 aan: er ontstaat dan een tweede oplossing met periode k .
- b. Een eigenwaarde neemt de waarde -1 aan: er ontstaat dan een tweede oplossing met periode $2k$.
- c. Twee toegevoegd complexe eigenwaarden gaan door de eenheidscirkel. Er ontstaat een quasi-periodieke oplossing of één met periode mk .

5. DE LOGISTISCHE DIFFERENTIEVERGELIJKING

Als voorbeeld nemen we het 1-dimensionale systeem

$$(18) \quad x(k+1) = a x(k) \{1 - x(k)\}.$$

Voor $0 < a < 1$ is de stationaire oplossing $x_s = 0$ stabiel. Voor $a = 1$ neemt de eigenwaarde van het gelineariseerde systeem

$$(19) \quad v(k+1) = a v(k)$$

de waarde 1 aan. De triviale oplossing wordt instabiel en er ontstaat een stabiele stationaire oplossing:

$$(20) \quad x_s = (a-1)/a.$$

Linearisatie levert

$$(21) \quad v(k+1) = (2-a) v(k).$$

Voor $a = 3$ wordt de stationaire oplossing (20) instabiel en er ontstaat

een oplossing met periode 2 omdat de eigenwaarde door -1 gaat. Vervolgens passeert a een rij van waarden a_k waarvoor nieuwe oplossingen met verdubbelde periode 2^k ontstaan. Voorbij het punt $a_\infty \sim 3.57$ is de dynamica van het systeem zeer gecompliceerd en wordt wel "chaotisch" genoemd, zie MAY [7].

6. CONTINUE DYNAMISCHE SYSTEMEN

Indien van de variabelen een grote reeks waarden over een langere periode beschouwd wordt en als bovendien de variabelen over één discrete tijdstap weinig veranderen, dan ligt het voor de hand om op een continu systeem over te gaan. Stel

$$(22) \quad x_i(\tau+1) = x_i(\tau) + \delta f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n$$

met $0 < \delta \ll 1$. We voeren een tijdschaal $t = \tau \delta$ in, zodat

$$(23) \quad x_i(t+\delta) = x_i(t) + \delta f_i(x_1, \dots, x_n).$$

Voor $\delta \rightarrow 0$ gaat het stelsel differentievergelijkingen (23) over in een stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$(24) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad \text{of} \quad \frac{dx}{dt} = f(x).$$

Voor een stationaire oplossing x_s geldt

$$(25) \quad f(x_s) = 0.$$

De stabiliteit van deze oplossing wordt onderzocht aan de hand van het gelineariseerde systeem dat gevonden wordt na substitutie van

$$(26) \quad x = x_s + v.$$

Het gelineariseerde systeem wordt

$$(27) \quad \frac{dv}{dt} = J v, \quad J = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x_s) \right]_{n \times n}.$$

Er is een reguliere transformatie $v = Hy$ zodanig dat

$$(28) \quad H^{-1} J H = D$$

waarin D een diagonaal matrix is met de eigenwaarden van J op de diagonaal. De vectorfunctie $y(t)$ voldoet aan

$$(29) \quad \frac{dy}{dt} = Dy \quad \text{of} \quad \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

De componenten y_i van het nieuwe systeem zijn dus ontkoppeld. Als $\text{Re } \lambda_i < 0$ voor alle i dan gaat $y(t) \rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$. Een verstoring $v(t)$ zal dus uitdampen. Als voor één (of meer) eigenwaarden λ_i geldt $\text{Re } \lambda_i > 0$ dan gaat $y_i(t) \rightarrow \infty$ en een verstoring $v(t)$ zal groeien. Meer over de theorie van differentiaalvergelijkingen van het type (24) wordt gevonden in HALE [3].

7. BIFURCATIE

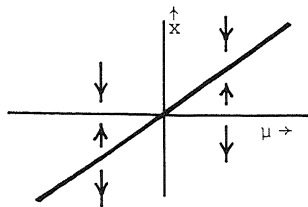
Bij een continu niet-lineair dynamisch systeem kan eveneens kritische afhankelijkheid van een parameter optreden, zie [4]. Beschouw het systeem (24) met een parameter μ

$$(30) \quad \frac{dx}{dt} = f(x; \mu).$$

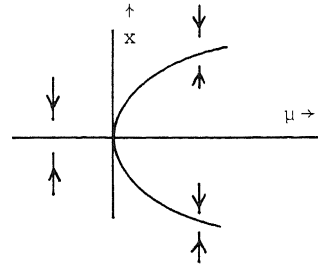
We volgen een stabiele stationaire oplossing $x_s(\mu)$, waarvoor de parameter μ een kritische waarde μ_c nadert. Essentiële informatie over het systeem in de omgeving van dat punt kan verkregen worden uit de Jacobiaan J , zie (27). Het volgende is mogelijk:

- a. Een reële eigenwaarde wordt positief: er takken één of twee nieuwe oplossingen af (bifurcatie).
- b. Twee toegevoegd complexe eigenwaarden gaan door de imaginaire as: er takt een periodieke oplossing af (Hopf bifurcatie).

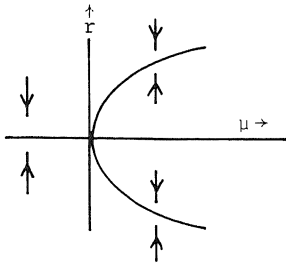
Een derde mogelijkheid is dat voorbij het kritische punt geen enkele oplossing bestaat. In fig. 1 geven we een aantal eenvoudige 1-dimensionale systemen, welke de diverse mogelijkheden weergeven.



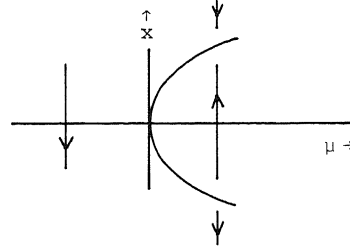
(a) $dx/dt = x(\mu-x)$,
 $x_{s_1} = 0, x_{s_2} = \mu$.



(b) $dx/dt = \mu x - x^3$,
 $x_{s_1} = 0, x_{s_2} = \sqrt{\mu}, x_{s_3} = -\sqrt{\mu}$.



(c) $dr/dt = \mu r - r^3$,
 $d\theta/dt = 1$,
 $x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta$,
 $x_{s_1} = 0, r_{s_2} = \sqrt{\mu}$.



(c) $dx/dt = \mu - x^2$,
 $x_{s_1} = \sqrt{\mu}, x_{s_2} = -\sqrt{\mu}$.

Fig. 1. Voorbeelden van kritische afhankelijk van de parameter μ van de differentiaalvergelijking (30).

OPGAVEN

1. Geef de transformatie van toestandsvariabelen welke systeem (2) in de vorm (3) brengt.
2. Van een systeem met n variabelen hangt de toestand op het tijdstip $t=k+1$ af van de toestand op de tijdstippen $t=k$ én $t=k-1$. Ontwerp een $2n$ -dimensionaal dynamisch systeem van het type (1) waarin deze afhankelijkheid tot uitdrukking komt.
3. Gegeven de Lesliematrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de stationaire verdeling over de twee leeftijdsklassen. Stel op $t=0$ zijn er 100 exemplaren van leeftijdsklasse 1 en is er geen enkel exemplaar van leeftijdsklasse 2. Hoe is de verdeling na 5 jaar? Vergelijk het antwoord met de gevonden stationaire verdeling.

4. Bestudeer het gedrag van de logistische differentievergelijking (18) voor $k \rightarrow \infty$ met een programmeerbare zakrekenmachine of microcomputer. Neem waarden voor a op het interval $(0,4)$ en een vaste startwaarde $x(0)$ op het interval $(0,1)$.
5. Verifieer formule (11).
6. Beschouw het discrete dynamische systeem (prooi-predator model)

$$x(k+1) = x(k)\{a - x(k) - y(k)\},$$

$$y(k+1) = b x(k) y(k)$$

voor $0 < a \leq 4$, $0 < b \leq 4/a$ en $x, y \geq 0$, $x + y < a$. Bepaal de stationaire punten en onderzoek de stabiliteit ervan. Ga na welk type oplossingen aftakken bij omslag van stabiliteit van deze oplossingen. Analyseer het systeem op een microcomputer door afbeelding van de rij punten $\{x(k), y(k)\}$ in het x, y -vlak. Varieer de parameters a en b (zie J.R. Beddington, C.A. Free and J.H. Lawton, Nature 255 (1975), 58-60).

7. Beschouw het continue dynamische systeem

$$\frac{dx}{dt} = a\left(y - \frac{1}{3}x^3 + x\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + b$$

voor $0 < a < 4$ en $0 < b < \sqrt{2}$. Bepaal het stationaire punt en onderzoek de stabiliteit ervan. Wat voor type oplossing takt af als de stabiliteit omslaat? Integreer het systeem numeriek voor $a=3$ en voor diverse waarden van b . Neem één vaste startwaarde en beeld de oplossingscurve in het x,y -vlak af.

8. Schrijf het systeem van Fig. 1c in de vorm van (30).

LITERATUUR

- [1] CAPEL, P.H.B., *Niet-lineaire differentievergelijkingen*, doctoraalscriptie Univ. v. Amsterdam, 1977.
- [2] FLIPSE, E. & E.J.M. VELING, *An application of the Leslie Matrix model to the population dynamics of the hooded seal (Cystophora Cris-tata exleben)*, Report TN 101, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1981.
- [3] HALE, J.K., *Ordinary differential equations*, Interscience, New York, 1969.
- [4] IOOSS, G. & D.D. JOSEPH, *Elementary stability and bifurcation theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [5] DE LANGE, J. & G.A. VONK, *Klapmutsen in gevaar?* Nieuwe Wiskrant, 2^e jaarg. no. 2, nov. 1982, p.44-52.
- [6] DE LANGE, J. & M. KINDT, *Matrices*, OW & OC, Utrecht, 1983.
- [7] MAY, R.M., *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature 261 (1976), p. 459-467.
- [8] PIELOU, E.C., *An introduction to mathematical ecology*, Wiley-Inter-science, New York, 1969.